

Chapitre 13

Applications physiques de la transformée de Fourier

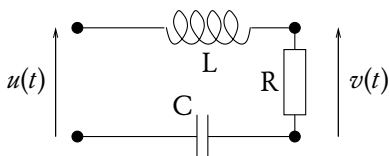
13.1

Justification de l'analyse en régime sinusoïdal

Lors de l'étude d'un *système linéaire* (par exemple, un système mécanique formé de ressorts et de masselottes, ou bien un circuit électrique comportant des composants linéaires comme des résistances, des condensateurs ou des bobines, ou encore dans l'étude du champ électromagnétique libre...) il est habituel de tenir le raisonnement suivant : 1° on considère les situations où le signal considéré est purement *monochromatique*; 2° la réponse à un signal quelconque est la somme des réponses aux différentes fréquences qui composent le signal. On justifie ensuite l'analyse sinusoïdale en disant

Si l'on impose en entrée un signal sinusoïdal de fréquence ω donnée, alors le signal de sortie est obligatoirement sinusoïdal avec la même fréquence ω .

Pour fixer les idées, considérons l'exemple très scolaire d'un circuit de type « RLC ». Supposons que le signal d'entrée soit la tension $t \mapsto u(t)$ aux bornes du circuit total et le signal de sortie la tension $t \mapsto v(t)$ aux bornes de la résistance (c'est-à-dire, à un facteur R près, l'intensité parcourant le circuit).



En établissant l'équation différentielle liant u et v , on obtient l'égalité (valable au sens des distributions) :

$$u = \left[\frac{L}{R} \delta' + \frac{1}{RC} H + \delta \right] * v = D * v,$$

que l'on peut (en utilisant tout l'attirail de l'analyse de Fourier!) inverser en une équation du type

$$v(t) = T(t) * u(t),$$

où T est la réponse impulsionnelle du système, c'est-à-dire $T = D^{*-1}$.

On se spécialise dans le cas où le signal d'entrée est sinusoïdal, avec une pulsation ω (ou une fréquence ν reliée à ω par $\omega = 2\pi\nu$). Le signal de sortie est supposé sinusoïdal, de même pulsation ω . Les équations sont alors simplifiées par le fait qu'on peut écrire formellement « $d/dt = i\omega$ ». On définit la **fonction de transfert** $Z(\omega)$ comme étant le rapport entre le signal de sortie $v(t) = v_0 e^{i\omega t}$ et le signal d'entrée $u(t) = u_0 e^{i\omega t}$:

$$Z(\omega) = \frac{v(t)}{u(t)} = \frac{v_0}{u_0}.$$

Lorsque le signal d'entrée est une superposition de signaux sinusoïdaux (ce qui est, de manière générale, le cas), on utilise alors la linéarité du système : il suffit de multiplier *chaque composante sinusoïdale* du signal d'entrée par la valeur de la fonction de transfert pour la pulsation choisie et de sommer (intégrer) le tout :

$$\begin{aligned} \text{si } u(t) &= \sum_n a_n e^{i\omega_n t}, & \text{alors } v(t) &= \sum_n a_n Z(\omega_n) e^{i\omega_n t} \\ \text{et si } u(t) &= \int a(\omega) e^{i\omega t} d\omega, & \text{alors } v(t) &= \int a(\omega) Z(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Le seul point délicat dans ce raisonnement est la justification de la monochromaticité du signal de sortie. Elle est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 13.1 *Les signaux exponentiels (réels $t \mapsto e^{-Pt}$ ou complexes $t \mapsto e^{2i\pi\nu t}$) sont des fonctions propres des opérateurs de convolution.*

En effet, supposons les signaux d'entrée u et de sortie v liés par une équation de convolution : $v(t) = T(t) * u(t)$, avec T une fonction ou une distribution tempérée ; si u est de la forme $u(t) = e^{2i\pi\nu t}$, alors $v(t) = T(t) * e^{2i\pi\nu t}$ est infiniment dérivable (puisque l'exponentielle l'est) et le théorème 8.18 nous permet d'écrire

$$v(t) = \langle T(\vartheta), e^{2i\pi\nu(t-\vartheta)} \rangle = \langle T(\vartheta), e^{-2i\pi\nu\vartheta} \rangle e^{2i\pi\nu t},$$

ce qui est bien une exponentielle complexe de même fréquence que le signal d'entrée. La fonction de transfert vaut, à la fréquence ν , $Z(\nu) = \langle T(\vartheta), e^{-2i\pi\nu\vartheta} \rangle$, c'est-à-dire la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle T :

$$Z = \tilde{T}.$$

La quantité $Z(\nu)$ peut également être vue comme la *valeur propre* associée au *vecteur propre* $t \mapsto e^{2i\pi\nu t}$ pour l'opérateur de convolution T .

On peut effectuer le même raisonnement si l'exponentielle est réelle. Si le signal d'entrée est de la forme $u(t) = e^{pt}$ (où p est un réel), le signal de sortie, toujours d'après le théorème 8.18, s'écrit

$$v(t) = \langle T(\vartheta), e^{p(t-\vartheta)} \rangle = \langle T(\vartheta), e^{-p\vartheta} \rangle e^{pt}.$$

La « fonction de transfert » $p \mapsto \langle T(\vartheta), e^{-p\vartheta} \rangle$ est alors bien sûr la *transformée de Laplace* de la réponse impulsionnelle T (chapitre 12).

13.2

T.F. des champs de vecteurs : champs longitudinaux et champs transverses

On peut étendre la définition de la transformée de Fourier à un espace à n dimensions.

DÉFINITION 13.2 La **transformée de Fourier** d'une fonction $x \mapsto f(x)$ d'une variable de $\mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$\tilde{f}(\mathbf{v}) = \iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2i\pi \mathbf{v} \cdot x} d^n x.$$

On généralise toutes les propriétés précédemment vues, en prenant garde toutefois aux changements d'échelle :

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|^n} \tilde{f}\left(\frac{\mathbf{v}}{a}\right).$$

On peut également définir, *coordonnée par coordonnée*, la transformée de Fourier à trois dimensions d'un *champ de vecteurs* $x \mapsto \mathbf{A}(x)$. Cela permet de définir ce que sont des *champs transverses* et des *champs longitudinaux*.

Soit $x \mapsto \mathbf{A}(x)$ un champ de vecteurs, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et défini également sur $\mathbb{R}^3$. On peut décomposer ce champ $\mathbf{A}$ en trois composantes $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, dont chacune est un champ scalaire, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{A}_x$ la transformée de Fourier de A_x , $\mathcal{A}_y$ celle de A_y et $\mathcal{A}_z$ celle de A_z . En réunissant ces trois champs scalaires en un champ vectoriel $k \mapsto \mathcal{A}(k)$, on obtient la transformée de Fourier du champ de vecteurs original :

$$\mathcal{A}(k) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A}(x) e^{-2i\pi k \cdot x} d^3 x.$$

DÉFINITION 13.3 Soit $\mathbf{A}(x)$ un champ d'une variable $x \in \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On note $k \mapsto \mathcal{A}(k)$ sa transformée de Fourier. On décompose alors, en tout $k \in \mathbb{R}^3$, le vecteur $\mathcal{A}(k)$ en deux composantes :

- la première est colinéaire à $\mathbf{k}$ et on la note $\mathcal{A}_{//}(\mathbf{k})$; elle est donnée par la formule :

$$\mathcal{A}_{//}(\mathbf{k}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\mathcal{A}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|^2} \mathbf{k} ;$$

- la seconde est orthogonale à $\mathbf{k}$ et on la note $\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{k})$; elle est donnée par :

$$\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{k}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{A}(\mathbf{k}) - \mathcal{A}_{//}(\mathbf{k}).$$

La **composante longitudinale** du champ $\mathbf{A}$ est donnée par la transformée de Fourier inverse du champ $\mathbf{k} \mapsto \mathcal{A}_{//}(\mathbf{k})$:

$$\mathbf{A}_{//}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{F}^{-1} \left[\mathbf{k} \frac{\mathcal{A}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \right].$$

Sa **composante transverse** est alors

$$\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{k})] = \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_{//}(\mathbf{x}).$$

DÉFINITION 13.4 Un champ est dit **transverse** si sa composante longitudinale est nulle; il est dit **longitudinal** si sa composante transverse est nulle.

Le théorème de dérivation nous permet d'écrire le résultat bien connu :

PROPOSITION 13.5 *Un champ transverse vérifie la relation*

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{en tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

c'est-à-dire que sa divergence est identiquement nulle.

Il est important de bien remarquer que la propriété « être transverse » ou « être longitudinal » n'est aucunement une propriété *locale* du champ de vecteurs (connaître la valeur du champ en un point ou au voisinage d'un point n'est pas suffisant), mais une propriété dépendant de la valeur du champ en tout point de l'espace. (Voir exercice 13.1 page 323.)

Remarque 13.6 Un champ monochromatique, de vecteur d'onde $\mathbf{k}$, est transverse s'il est en tout point colinéaire à $\mathbf{k}$; on s'en fait aisément une représentation intuitive. Un champ transverse est une somme de champs monochromatiques transverse.

13.3

Relations d'incertitude de Heisenberg

En mécanique quantique non relativiste, l'état d'une particule sans spin est représentée par une fonction complexe ψ de carré sommable et de classe $\mathcal{C}^2$. Plus précisément, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\psi(\cdot, t) : \mathbf{r} \mapsto \psi(\mathbf{r}, t)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Cette fonction représente l'amplitude de probabilité de présence de la particule, c'est-à-dire que la densité de probabilité associée à la présence de la particule au point $\mathbf{r}$ de l'espace et à l'instant t est $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$. La fonction $\psi(\cdot, t)$ est normalisée (au sens de la norme L^2) à 1 :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad \|\psi(\cdot, t)\|_2^2 = \iiint_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r} = 1.$$

DÉFINITION 13.7 On appelle **fonction d'onde en représentation position** la fonction de carré sommable ainsi définie. On appellera $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions d'onde. Cet espace, muni du produit scalaire usuel, est un *espace de Hilbert*¹.

DÉFINITION 13.8 On note X l'**opérateur position** sur l'axe $\mathcal{O}x$, Y et Z ceux sur les axes $\mathcal{O}y$ et $\mathcal{O}z$, et $\mathbf{R} \stackrel{\text{déf.}}{=} (X, Y, Z)$. L'opérateur X est défini par son action sur toute fonction d'onde

$$X\psi = \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi(\cdot, t) : \mathbf{r} \mapsto x \psi(\mathbf{r}, t),$$

en notant génériquement $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Il faut bien faire attention à ne pas commettre l'erreur (très) classique qui consiste à dire que ψ et $X\psi$ sont proportionnelles, le coefficient de proportionnalité étant x !

Il est d'usage de noter $|\psi(t)\rangle$ la fonction $\psi(\cdot, t)$ considérée comme un vecteur de l'espace vectoriel des fonctions d'ondes². Le produit scalaire entre deux vecteurs est alors (attention : la convention choisie pour le produit hermitien en mécanique quantique est alors : *linéaire à droite* et *semi-linéaire à gauche*) :

$$\langle \psi(t) | \varphi(t) \rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} \iiint \overline{\psi(\mathbf{r}, t)} \varphi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r},$$

et l'action de l'opérateur position se note

$$X|\psi(t)\rangle = |\varphi(t)\rangle \quad \text{avec} \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = x \psi(\mathbf{r}, t).$$

¹ Ou plutôt on fait *comme si* c'était un espace de Hilbert, voire on le pose comme *postulat*. Car pour de nombreuses applications physiques, l'espace des fonctions de carré intégrable n'est pas suffisant. Notamment, les fonctions $\mathbf{r} \mapsto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ sont couramment employées, bien que n'étant pas de carré sommable. Ce sont des fonctions d'onde « non physiques ». Force est de constater que les auteurs ne définissent que très rarement ce qu'est exactement l'espace des fonctions d'onde utilisé ; ils vérifient encore moins souvent que c'est *effectivement* un espace de Hilbert. Les difficultés sont d'ailleurs disproportionnées, si on les compare aux avantages acquis pour la physique de tous les jours.

² En réalité, $|\psi(t)\rangle$ est un vecteur d'un espace de Hilbert abstrait H . Il existe cependant un morphisme de H vers $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire que le vecteur $|\psi(t)\rangle$ peut être *représenté* par la fonction $\mathbf{r} \mapsto \psi(\mathbf{r}, t)$: c'est la **représentation position**. Cependant, puisque la transformation de Fourier est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^3)$ sur lui-même, le vecteur $|\psi(t)\rangle$ peut tout aussi bien être représenté par la fonction $\mathbf{p} \mapsto \tilde{\psi}(\mathbf{p}, t)$, transformée de Fourier de la précédente. C'est ce que l'on appelle la **représentation impulsion** du vecteur d'onde.

À chaque vecteur $|\psi\rangle$ est associé une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{H}$, que l'on notera $\langle\psi| \in \mathcal{H}^*$, par l'intermédiaire du produit scalaire. Ainsi, la notation $\langle\varphi|\psi\rangle$ a-t-elle deux significations (équivalentes) : produit scalaire de φ et ψ (au sens du produit dans l'espace L^2), ou bien action de la forme $\langle\psi|$ sur le vecteur $|\varphi\rangle$ (on comparera utilement aux résultats du paragraphe 15.3.b page 359).

C'est à Dirac que l'on doit ces notations compactes et pratiques³.

DÉFINITION 13.9 On appelle **position moyenne sur l'axe des x** d'une particule caractérisée par la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$, la quantité

$$\langle x \rangle(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \langle \psi(t) | X | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | X | \psi(t) \rangle = \iiint x |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r}.$$

Par ailleurs, à une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ on associe sa transformée de Fourier par rapport à la variable $\mathbf{r}$:

$$\Psi(\mathbf{p}, t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \iiint \psi(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \frac{d^3\mathbf{r}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}.$$

Cette fonction représente l'amplitude de probabilité de trouver la particule avec une impulsion $\mathbf{p}$. Bien évidemment, cette fonction est normée à 1, puisqu'en raison du théorème de Parseval-Plancherel, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = \iiint |\Psi(\mathbf{p}, t)|^2 d^3\mathbf{p} = \iiint |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r} = 1.$$

DÉFINITION 13.10 On appelle **fonction d'onde en représentation impulsion** la transformée de Fourier $\Psi(\mathbf{p}, t)$ de la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ d'une particule.

DÉFINITION 13.11 On définit l'**opérateur impulsion $\mathbf{P}$** $\stackrel{\text{déf.}}{=} -i\hbar\nabla = (P_x, P_y, P_z)$ qui agit sur les fonctions différentiables par

$$P_x\psi = \varphi \quad (\text{ou } P_x|\psi\rangle = |\varphi\rangle) \quad \text{avec} \quad \varphi(\cdot, t) : \mathbf{r} \mapsto -i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial x}(\mathbf{r}, t).$$

L'**impulsion moyenne** selon la direction x d'une particule caractérisée par la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ est

$$\langle p_x \rangle(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \langle \psi(t) | P_x | \psi(t) \rangle = -i\hbar \iiint \overline{\psi(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial\psi}{\partial x}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}.$$

D'après les résultats connus sur la transformée de Fourier, on voit que l'on peut étendre la définition de l'opérateur P_x sur les fonctions d'onde « en représentation impulsion », par

$$P_x\Psi \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{F} [P_x\mathcal{F}^{-1}[\Psi]],$$

ce qui nous donne explicitement, en vertu du théorème de dérivation :

$$P_x\Psi = \Phi \quad \text{avec} \quad \Phi(\cdot, t) : \mathbf{p} \mapsto p_x\Psi(\mathbf{p}, t).$$

³ Bien que parfois ambiguës, hélas, comme le lecteur désireux d'en connaître davantage sur les mathématiques de la mécanique quantique pourra s'en convaincre en lisant l'excellente référence [42].

DÉFINITION 13.12 On appelle **incertitude sur la position** d'une particule caractérisée par la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ la quantité Δx définie par

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &\stackrel{\text{déf.}}{=} \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle X\psi | X\psi \rangle - \langle \psi | X\psi \rangle^2 \\ &= \iiint x^2 |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r} - \langle x \rangle^2. \end{aligned}$$

DÉFINITION 13.13 On appelle **incertitude sur l'impulsion** d'une particule caractérisée par la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ la quantité Δp_x définie par

$$\begin{aligned} (\Delta p_x)^2 &= \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2 = \langle P\psi | P\psi \rangle - \langle \psi | P\psi \rangle^2 \\ &= \iiint \hbar^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial x}(\mathbf{r}, t) \right|^2 d^3\mathbf{r} - \langle p_x \rangle^2 \\ &= \iiint p_x^2 |\Psi(\mathbf{p}, t)|^2 d^3\mathbf{p} - \langle p_x \rangle^2. \end{aligned}$$

Il est à noter que $\langle p_x^2 \rangle$ peut également s'écrire comme la valeur moyenne de l'opérateur $P_x^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dans l'état $|\psi\rangle$, puisqu'une simple intégration par partie montre que :

$$\langle P_x^2 \rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} \langle \psi | P_x^2 \psi \rangle = -\hbar^2 \iiint \overline{\psi(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \iiint \hbar^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial x}(\mathbf{r}, t) \right|^2 d^3\mathbf{r}.$$

Pour pouvoir effectuer cette intégration par partie, il est nécessaire que la dérivée de ψ décroisse suffisamment vite, ce qui est le cas lorsque $\langle \Delta p_x \rangle$ existe et est bien définie.

Remarque 13.14 Les quantités moyennes et les incertitudes sont à rapprocher de l'espérance et de l'écart-type d'une variable aléatoire (voir chapitre 19).

Nous allons maintenant montrer qu'il existe une relation entre Δx et Δp_x . Pour commencer, on notera le lemme suivant

LEMME 13.15 Soit ψ une fonction d'onde.

- i) Si l'on translate la fonction d'onde d'une quantité $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ en posant $\psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a}, t)$ pour tout $(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, ni la valeur de Δx ni la valeur de Δp_x ne sont modifiées.
- ii) De la même façon, si l'on translate dans l'espace des impulsions d'une quantité $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ (ou, ce qui revient au même, si l'on multiplie la fonction d'onde en représentation position par un facteur de phase en posant $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \psi(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} / \hbar}$), alors ni la valeur de Δx ni la valeur de Δp_x ne sont modifiées.
- iii) En conséquence de quoi on peut définir une fonction d'onde centrée en position et en impulsion $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ (c'est-à-dire telle que sa position moyenne et son impulsion moyenne sont nulles) et de même incertitude sur la position et sur l'impulsion que la fonction originelle $\psi(\mathbf{r}, t)$.

DÉMONSTRATION. La valeur moyenne de la position de la translatée ψ_a est

$$\begin{aligned}\langle x \rangle_a &= \iiint x |\psi_a(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r} = \iiint (x - a_x) |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r} \\ &= \langle x \rangle - a_x.\end{aligned}$$

L'incertitude sur la position est alors

$$\begin{aligned}(\Delta x)_a^2 &= \langle x^2 \rangle_a - \langle x \rangle_a^2 = \iiint x^2 |\psi(\mathbf{r} - \mathbf{a}, t)|^2 d^3\mathbf{r} - (\langle x \rangle - a_x)^2 \\ &= \iiint (x - a_x)^2 |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r} - (\langle x \rangle^2 - 2a_x \langle x \rangle + a_x^2) \\ &= \langle x^2 \rangle - 2a_x \langle x \rangle + a_x^2 - (\langle x \rangle^2 - 2a_x \langle x \rangle + a_x^2) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = (\Delta x)^2.\end{aligned}$$

L'incertitude sur l'impulsion de $|\psi\rangle$ n'a évidemment pas changé.

La démonstration est identique pour la translatée dans le monde des impulsions.

Enfin, la fonction d'onde centrée s'écrit, pour un t donné :

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \psi(\mathbf{r} - \langle \mathbf{r} \rangle, t) e^{i\langle \mathbf{p} \rangle \cdot \mathbf{r} / \hbar}.$$

THÉORÈME 13.16 (Relations d'incertitude de Heisenberg)

Soit ψ une fonction d'onde possédant une moyenne en position et en impulsion, ainsi que des incertitudes en position et en impulsion. On a alors la relation

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (13.1)$$

(Et de même en y et z .)

De plus, on n'a égalité que dans le cas où ψ est une fonction gaussienne.

DÉMONSTRATION. Quitte à translater la fonction d'onde grâce au lemme 13.15, on peut supposer que $\langle x \rangle = 0$ et $\langle p_x \rangle = 0$. Par ailleurs, nous allons sous-entendre la dépendance en t pour alléger l'écriture. On a alors

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 &= \iiint x^2 |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} \\ \text{et } (\Delta p_x)^2 &= \hbar^2 \iiint \left| \frac{\partial \psi}{\partial x}(\mathbf{r}) \right|^2 d^3\mathbf{r}.\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des fonctions de L^2 s'écrit

$$\left| \iiint \overline{f(\mathbf{r})} g(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \right|^2 \leq \iiint |f(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} \cdot \iiint |g(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r}.$$

En appliquant cette inégalité aux fonctions $f(\mathbf{r}) = x\psi(\mathbf{r})$ et $g(\mathbf{r}) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(\mathbf{r})$, on obtient

$$\begin{aligned}\left| \iiint \overline{x\psi(\mathbf{r})} \frac{\partial \psi}{\partial x}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \right|^2 &\leq \iiint x^2 |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} \cdot \iiint \left| \frac{\partial \psi}{\partial x}(\mathbf{r}) \right|^2 d^3\mathbf{r} \\ &\leq \frac{1}{\hbar^2} (\Delta x)^2 (\Delta p_x)^2.\end{aligned} \quad (*)$$

Or, en effectuant une intégration par parties, on peut écrire, x étant réel et les termes de bord étant supposés s'annuler (voir remarque 13.18 ci-dessous) :

$$\iiint \overline{x\psi(\mathbf{r})} \frac{\partial \psi}{\partial x}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = - \iiint |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} - \iiint x\psi(\mathbf{r}) \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x}(\mathbf{r})} d^3\mathbf{r}$$

soit
$$2\Re \iiint \overline{x\psi(\mathbf{r})} \frac{\partial \psi}{\partial x}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = - \iiint |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} = -1.$$

Puisque $|z| \geq |\Re(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, le terme de gauche de l'équation (*) vérifie

$$\left| \iiint \overline{x\psi(\mathbf{r})} \frac{\partial \psi}{\partial x}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \right|^2 \geq \left| \Re \iiint \overline{x\psi(\mathbf{r})} \frac{\partial \psi}{\partial x}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \right|^2 = \frac{1}{4}.$$

On en déduit immédiatement l'équation (13.1).

L'inégalité de Cauchy-Schwarz devient égalité quand il y a proportionnalité entre les deux fonctions; or $X\psi$ et $\partial\psi/\partial x$ ne peuvent être proportionnelles que si ψ est gaussienne en x (c'est une simple équation différentielle à résoudre).

Si l'on avait gardé la définition usuelle de la transformée de Fourier (avec le facteur 2π et sans $\hbar$), on aurait le théorème équivalent suivant :

THÉORÈME 13.17 (Relation d'incertitude) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction telle que le second moment $\int x^2 |f(x)|^2 dx$ et $\int |f'(x)|^2 dx$ existent. Notons

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &\stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{\|f\|_2^2} \int x^2 |f(x)|^2 dx \\ \text{et} \quad \langle v^2 \rangle &\stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{\|f\|_2^2} \int v^2 |\tilde{f}(v)|^2 dv = \frac{4\pi^2}{\|f\|_2^2} \int |f'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Alors $\langle x^2 \rangle \cdot \langle v^2 \rangle \geq \frac{1}{16\pi^2}$ avec égalité si et seulement si f est une gaussienne.

Remarque 13.18 Précisons un point laissé flou dans la démonstration précédente, concernant l'annulation des termes de bord lors de l'intégration par parties. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions ψ de carré intégrable, telles que $X\psi$ et $P_x\psi$ soient de carré intégrable. Cet ensemble, une fois muni, par exemple, de la norme N définie par

$$\begin{aligned} N(\psi)^2 &= \|\psi\|_2^2 + \|X\psi\|_2^2 + \|P\psi\|_2^2 \\ &= \iiint |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} + \iiint x^2 |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} + \iiint p_x^2 |\Psi(\mathbf{p})|^2 d^3\mathbf{p}, \end{aligned}$$

est un espace de Hilbert.

Si $\psi \in \mathcal{H}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support borné sur x , alors la démonstration précédente, et notamment l'intégration par parties avec annulation des termes de bord, est correcte.

Un résultat classique d'analyse (que l'on démontre par convolution par une suite de fonctions de Dirac) est que l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support borné est dense dans $\mathcal{H}$. Par continuité, le résultat précédent est alors valable pour toute $\psi \in \mathcal{H}$.

13.4

Signaux analytiques

On a l'habitude, en électricité ou en optique par exemple, de travailler avec des signaux sinusoïdaux complexes du type $e^{i\omega t}$, mais dont seule la partie réelle a une signification physique. Ce passage du signal réel $f_{(R)}(t) = \cos(\omega t)$ à un signal complexe $f(t) = e^{i\omega t}$ peut se généraliser dans le cas d'un signal non monochromatique.

Tout d'abord, notons que l'on peut retrouver le signal réel en suivant deux méthodes différentes : soit prendre la partie réelle du signal complexe associé, soit lui ajouter son complexe conjugué et diviser par 2.

On généralise maintenant cette notion. Considérons un signal réel $f_{(R)}(t)$ et cherchons le signal complexe qui lui est associé. Dans le cas $f_{(R)}(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$ (avec $\nu_0 > 0$), le spectre de $f_{(R)}$ contient les deux fréquences ν_0 et $-\nu_0$. Cependant, l'information est redondante, l'intensité de la fréquence $-\nu_0$ est la même que celle de la puissance ν_0 puisque $f_{(R)}$ est réelle. Le signal complexe $f(t) = e^{2i\pi\nu_0 t}$ associé au signal réel $f_{(R)}$ s'obtient ainsi : on prend le spectre de $f_{(R)}$, on ne garde que les fréquences positives, on multiplie par deux et on reconstitue le signal.

D'une manière générale, si $f_{(R)}(t)$ est un signal réel admettant une transformée de Fourier $\tilde{f}_{(R)}(\nu)$, alors son spectre est hermitien :

$$\tilde{f}_{(R)}(\nu) = \overline{\tilde{f}_{(R)}(-\nu)} \quad \text{pour tout } \nu \in \mathbb{R} ;$$

ainsi, seule la « moitié » du spectre $\tilde{f}_{(R)}$ est nécessaire pour pouvoir reconstituer $f_{(R)}$.

Si le spectre $\tilde{f}_{(R)}(\nu)$ ne contient pas de singularité à l'origine, ou du moins est suffisamment régulier, alors on peut considérer le spectre tronqué

$$2H(\nu) \cdot \tilde{f}_{(R)}(\nu).$$

La transformée de Fourier inverse de ce spectre tronqué va nous donner le signal analytique associé à la fonction $f_{(R)}$. Puisque la transformée de Fourier inverse de $2H(\nu)$ est (voir théorème 11.15 page 260) :

$$\mathcal{F}^{-1}[2H(\nu)] = \mathcal{F}^{-1}[1 + \operatorname{sgn} \nu] = \delta(t) + \nu p \frac{i}{\pi t},$$

on en déduit que la transformée de Fourier inverse de $2H(\nu) \cdot \tilde{f}_{(R)}(\nu)$ est

$$\mathcal{F}^{-1}\left[2H(\nu) \cdot \tilde{f}_{(R)}(\nu)\right] = \left(\delta + \nu p \frac{i}{\pi t}\right) * f_{(R)} = f_{(R)}(t) - \frac{i}{\pi} \nu p \int \frac{f_{(R)}(t')}{t' - t} dt'.$$

On pose alors la définition suivante :

DÉFINITION 13.19 On appelle **signal analytique** une fonction dont la transformée de Fourier est causale, c'est-à-dire une fonction dont la transformée de Fourier est nulle pour les fréquences négatives.

DÉFINITION 13.20 Soit $f_{(\mathbb{R})}$ un signal réel possédant une transformée de Fourier suffisamment régulière⁴. On appelle **signal imaginaire** associé à $f_{(\mathbb{R})}$ l'opposé de sa transformée de Hilbert :

$$f_{(\mathbb{I})}(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} -\frac{1}{\pi} \text{vp} \int \frac{f_{(\mathbb{R})}(t')}{t' - t} dt'.$$

DÉFINITION 13.21 Le **signal analytique** associé au signal réel $f_{(\mathbb{R})}$ est la fonction

$$t \mapsto f(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} f_{(\mathbb{R})}(t) + i f_{(\mathbb{I})}(t) = f_{(\mathbb{R})}(t) - \frac{i}{\pi} \text{vp} \int \frac{f(t')}{t' - t} dt',$$

dont le spectre est $\tilde{f}(\nu) = 2H(\nu) \cdot \tilde{f}_{(\mathbb{R})}(\nu)$.

Le signal analytique associé à $f_{(\mathbb{R})}$ est analytique dans le sens de la définition 13.19 : son spectre est identiquement nul pour des fréquences $\nu < 0$. Puisque $\tilde{f}(\nu)$ est causale, elle admet une transformée de Laplace $F(p)$ dans le plan complexe et $F(p)$ est définie au moins sur le demi-plan complexe de droite. Le signal f étant la transformée de Fourier inverse de $\tilde{f}$, il est donné par

$$f(x) = F(-2i\pi x).$$

Il existe donc un *prolongement analytique* à f , dans le demi-plan supérieur⁵, que l'on trouve grâce à la transformée de Laplace du spectre :

$$f(z) = F(-2i\pi z).$$

Ce prolongement analytique est holomorphe dans le *demi-plan supérieur*, il vérifie donc bien les relations de Kramers-Kronig... qui ne donnent rien de plus que la relation de définition de $f_{(\mathbb{I})}$: la boucle est bouclée !

Le fait que f soit prolongeable en une fonction analytique sur le demi-plan complexe supérieur justifie ainsi la dénomination de « signal analytique ».

On peut résumer ces résultats ainsi :

THÉORÈME 13.22 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Fourier. Si le spectre de f est causal, alors f est prolongeable analytiquement sur le demi-plan complexe supérieur.

Si f est prolongeable analytiquement et si l'intégrale de f sur un demi-cercle supérieur tend vers 0 lorsque le rayon tend vers l'infini, alors le spectre de f est causal.

(Voir [83] pour plus de détails.)

Un exemple d'utilisation des signaux analytiques est fourni par un signal lumineux, caractérisé par une amplitude réelle $A_{(\mathbb{R})}(t)$. On peut écrire

$$A_{(\mathbb{R})}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_{(\mathbb{R})}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu,$$

⁴ Au sens où $H(\nu) \tilde{f}_{(\mathbb{R})}(\nu)$ existe ; il faut donc que $\tilde{f}_{(\mathbb{R})}$ ne contienne pas de distribution singulière en 0.

⁵ Supérieur à cause de la similitude $x \mapsto -2i\pi x$: l'image du demi-plan supérieur est le demi-plan de droite.

où $\mathcal{A}_{(R)}(\nu)$ est la transformée de Fourier de $A_{(R)}(t)$. Cependant, puisque $A_{(R)}(t)$ est réelle, on peut également écrire, en notant $2\mathcal{A}(\nu) = a(\nu)e^{i\varphi(\nu)}$ avec a et φ réelles, pour $\nu > 0$:

$$A_{(R)}(t) = \int_0^{+\infty} a(\nu) \cos [\varphi(\nu) + 2i\pi\nu t] d\nu.$$

Le signal imaginaire associé à $A_{(R)}$ est bien entendu

$$A_{(I)}(t) = \int_0^{+\infty} a(\nu) \sin [\varphi(\nu) + 2i\pi\nu t] d\nu,$$

et le signal analytique est

$$A(t) = \int_0^{+\infty} a(\nu) e^{i\varphi(\nu)} e^{2i\pi\nu t} d\nu.$$

La quantité $a(\nu) = 2|\mathcal{A}_{(R)}(\nu)|$ possède l'interprétation suivante : son carré $W(\nu) = a^2(\nu)$ est le **spectre de puissance**, ou **densité spectrale** du signal complexe A (voir la définition 13.24 page ci-contre). Cette densité spectrale complexe comprend une énergie transportée par le signal réel et une énergie égale transportée par le signal imaginaire. L'**intensité lumineuse totale** transportée par le signal lumineux réel est alors

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} W(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{A}_{(R)}(\nu)|^2 d\nu,$$

soit la moitié de l'intensité totale complexe (l'autre moitié est bien sûr transportée par le signal imaginaire).

13.5

Autocorrélation d'une fonction d'énergie finie

13.5.a Définition

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction de carré intégrable. On sait qu'elle admet alors une transformée de Fourier $\tilde{f}(\nu)$.

DÉFINITION 13.23 On appelle **signal d'énergie finie** toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$. On appelle **énergie totale** du signal d'énergie finie f , la quantité

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{déf.}}{=} \int |f(t)|^2 dt.$$

L'égalité de Parseval s'écrit :

$$\int |f(t)|^2 dt = \int |\tilde{f}(\nu)|^2 d\nu,$$

ce qui nous permet d'interpréter $|\tilde{f}(\nu)|^2$ comme une densité d'énergie par intervalle de fréquence $d\nu$.

DÉFINITION 13.24 On appelle **densité spectrale** du signal d'énergie finie f la fonction $\nu \mapsto |\tilde{f}(\nu)|^2$.

Il arrive, notamment en optique ou en mécanique quantique, que l'on s'intéresse à la fonction d'autocorrélation de la fonction f :

DÉFINITION 13.25 Soit f une fonction de carré sommable, la **fonction d'autocorrélation** de f est $\Gamma = f * \check{f}$ ou $\Gamma(x) = f(x) * \overline{f(-x)}$, c'est-à-dire que

$$\Gamma(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int f(t) \overline{f(t-x)} dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

13.5.b Propriétés

La fonction d'autocorrélation étant la convolution de f avec le conjugué de sa transposée $\Gamma(x) = f(x) * \overline{f(-x)}$, on peut utiliser les propriétés connues de la transformée de Fourier, pour obtenir différentes propriétés intéressantes et, notamment :

THÉORÈME 13.26 La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de f est égale au carré de la densité spectrale de f :

$$\mathcal{F}[\Gamma(t)] = \mathcal{F}\left[f(x) * \overline{f(-x)}\right] = |\tilde{f}(\nu)|^2.$$

PROPOSITION 13.27 Soit f est une fonction d'énergie finie ; alors sa fonction d'autocorrélation est hermitienne : $\Gamma(-x) = \overline{\Gamma(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De plus, si f est réelle, alors Γ est réelle et paire.

Par ailleurs, puisque $|e^{2i\pi\nu x}| \leq 1$, on a la majoration

$$|\Gamma(x)| = \left| \int |\tilde{f}(\nu)|^2 e^{2i\pi\nu x} d\nu \right| \leq \int |\tilde{f}(\nu)|^2 d\nu = \Gamma(0),$$

de laquelle on déduit :

THÉORÈME 13.28 Le module de la fonction d'autocorrélation d'une fonction f est maximal à l'origine : $|\Gamma(x)| \leq \Gamma(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\Gamma(0)$ est réel, positif et égal à l'énergie de f : $\Gamma(0) = \int |f(t)|^2 dt$.

DÉFINITION 13.29 On appelle la **fonction d'autocorrélation réduite** ou encore **fonction d'autocohérence**

$$\gamma(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(0)}.$$

Cette fonction $\gamma(x)$ est donc toujours de module compris entre 0 et 1.

13.5.c Intercorrélation

DÉFINITION 13.30 On appelle **fonction d'intercorrélacion** de deux fonctions de carré sommable f et g la quantité

$$\Gamma_{fg}(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int f(t) \overline{g(x-t)} dt.$$

On a alors, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\Gamma_{fg}(x)|^2 \leq \Gamma_f(0) \Gamma_g(0).$$

Cela nous permet d'introduire la *fonction de cohérence* :

DÉFINITION 13.31 On appelle **fonction d'intercohérence** ou **fonction de cohérence** entre f et g la fonction d'intercorrélacion réduite

$$\gamma_{fg}(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\Gamma_{fg}(x)}{\sqrt{\Gamma_f(0)\Gamma_g(0)}}.$$

Cette fonction de cohérence est donc toujours de module compris entre 0 et 1.

13.6

Fonctions de puissance finie

13.6.a Définitions

Les fonctions avec lesquelles nous avons travaillé jusqu'à présent sont des fonctions de carré sommable, c'est-à-dire des éléments de $L^2(\mathbb{R})$. Dans de nombreux cas physiques, comme en optique, l'intégrale $\int |f|^2$ représente une énergie. Parfois cependant, on cherche à travailler non avec des fonctions d'énergie finie, mais de *puissance* finie, comme par exemple $f(t) = \cos \omega t$.

DÉFINITION 13.32 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Si

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt$$

existe et est finie, alors f est dite **fonction de puissance finie** et la **puissance moyenne** transportée par le signal f est égale à cette limite.

On peut également redéfinir ce que va être la densité spectrale :

DÉFINITION 13.33 Soit f un signal de puissance finie, on appellera **densité spectrale**, ou **spectre de puissance** de f la quantité

$$W(\nu) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \right|^2.$$

On a alors un équivalent de la formule de Parseval pour un signal de puissance finie :

THÉORÈME 13.34 Soient $f(t)$ un signal de puissance finie et $W(\nu)$ sa densité spectrale. Alors

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\nu) d\nu.$$

13.6.b Autocorrélation

Pour une fonction de puissance finie, la définition 13.25 de l'autocorrélation n'est plus valable et l'on doit poser :

DÉFINITION 13.35 La **fonction d'autocorrélation** d'un signal de puissance finie f est

$$\Gamma(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \overline{f(t-x)} dt.$$

On a alors l'équivalent du théorème 13.26 :

THÉORÈME 13.36 La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'un signal de puissance finie est égale à la densité spectrale :

$$\mathcal{F}[\Gamma(t)] = W(\nu).$$

Exemple 13.37 Posons $f(t) = e^{2i\pi\nu_0 t}$. Alors sa fonction d'autocorrélation est $\Gamma(x) = e^{2i\pi\nu_0 x}$ et sa densité spectrale est $W(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$. Si l'on avait pris les définitions données pour une fonction d'énergie finie, on aurait trouvé que $\tilde{f}(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$ et la densité spectrale aurait dû être quelque chose comme $\delta^2(\nu - \nu_0)$. Comme nous l'avons vu dans le chapitre sur les distributions, le carré d'une distribution de Dirac n'a aucun sens.

13.7

Application à l'optique : théorème de Wiener-Khintchine

On considère une expérience d'interférences en optique au moyen de fentes d'Young, éclairées par une source ponctuelle (voir figure 13.1).

Nous allons montrer que, dans le cas où la source n'est pas tout à fait monochromatique mais présente au contraire une certaine largeur spectrale $\Delta\nu$, la figure d'interférences va se brouiller pour des points de l'écran correspondant à des différences de chemin optiques trop grandes entre les deux faisceaux. La différence de chemin optique à ne pas dépasser pour continuer à voir les franges s'appelle **longueur de cohérence** et nous montrerons qu'elle vaut $\ell = c/\Delta\nu$.

Considérons une source « non monochromatique ». On supposera que la source S de la figure envoie un signal réel $t \mapsto S_{(R)}(t)$, auquel correspond un signal

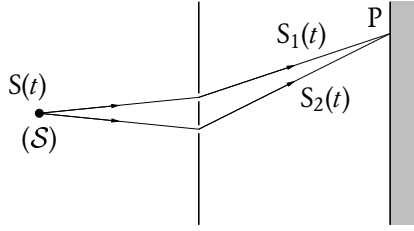


FIG. 13.1 — Expérience d'interférences lumineuses au moyen de fentes d'Young.

analytique complexe $t \mapsto S(t)$. On a donc $S_{(R)}(t) = \Re \{S(t)\}$. La transformée de Fourier de $S_{(R)}(t)$ est notée $\mathcal{S}_{(R)}(\nu)$.

On supposera que le signal envoyé est de puissance finie et est caractérisé par une densité spectrale de puissance $W(\nu)$, pour $\nu > 0$. Ce signal est dit **non monochromatique** si la densité spectrale $W(\nu)$ n'est pas un pic de Dirac.

Dans le montage proposé, on cherche l'intensité lumineuse arrivant au point P, donnée par la moyenne temporelle du carré du signal $S_P(t)$ arrivant au point P :

$$\mathcal{I}_P = \langle |S_P^2(t)| \rangle \quad \text{où l'on a défini} \quad \langle |S_P^2(t)| \rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |S_P(t)|^2 dt.$$

Le signal arrivant en P est la somme de deux signaux, provenant de chacune des fentes d'Young. Le signal provenant d'un des trous est donc le même que le signal provenant de l'autre, *mais* avec un décalage temporel $\tau = \Delta L/c$, où ΔL est la différence de chemin entre les deux rayons (et dépend donc du point P) :

$$S_P(t) = S_1(t) + S_2(t) = S_1(t) + S_1(t - \tau).$$

(La fonction $S_1(t)$ est directement relié au signal $S(t)$ émis par la source.)

On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_P &= \langle S_P \cdot \overline{S_P} \rangle = \langle (S_1 + S_2) \cdot (\overline{S_1} + \overline{S_2}) \rangle \\ &= \langle S_1 \cdot \overline{S_1} \rangle + \langle S_2 \cdot \overline{S_2} \rangle + 2\Re \langle S_1 \cdot \overline{S_2} \rangle \\ &= 2I + 2\Re \langle S_1 \cdot \overline{S_2} \rangle, \end{aligned}$$

en notant I la valeur moyenne $\langle S_1 \cdot \overline{S_1} \rangle$, qui est l'intensité lumineuse du signal passant par un seul trou sans interférences. Toute l'information sur les termes d'interférences est donnée par la partie $2\Re \langle S_1 \cdot \overline{S_2} \rangle$, qu'il est facile de calculer :

$$\langle S_1 \cdot \overline{S_2} \rangle = \langle S_1(t) \cdot \overline{S_1(t - \tau)} \rangle = \Gamma(\tau),$$

où $\Gamma(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation du signal complexe S_1 , que l'on appelle également ici **fonction d'autocohérence**⁶. (On rappelle que τ est fonction du point P d'observation.)

⁶ Dans certains ouvrages d'optique, c'est la fonction d'autocorrélation normée $\gamma(\tau) = \Gamma(\tau)/\Gamma(0)$ qui est appelée fonction d'autocohérence.

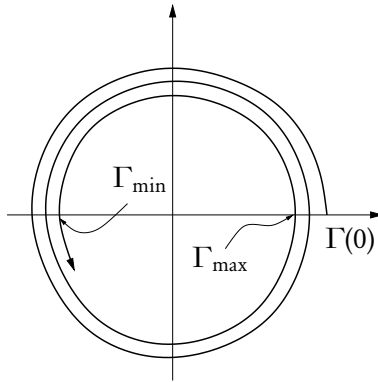


FIG. 13.2 — La fonction d'autocorrélation pour une source presque monochromatique, évoluant avec le paramètre τ dans le plan complexe. La valeur à l'origine $\Gamma(0)$ est réelle et positive. Le module de $\Gamma(t)$ varie *lentement* par rapport à sa phase.

L'intensité lumineuse au point P est donc donnée par

$$\mathcal{I}_P = 2I + 2\operatorname{Re}\{\Gamma(\tau)\} = 2I\left(1 + \operatorname{Re}\{\gamma(\tau)\}\right) \quad \text{avec} \quad \gamma(\tau) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} = \frac{\Gamma(\tau)}{I}.$$

On peut maintenant estimer le facteur de visibilité des raies, en utilisant le critère de Rayleigh [14] :

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (13.2)$$

Ici, $I_{\max}$ représente un *maximum local* d'intensité lumineuse, non au point P, mais *dans un voisinage immédiat* de P ; c'est-à-dire que l'on va déplacer légèrement le point d'observation et, donc, la valeur du paramètre τ , jusqu'à trouver une intensité qui soit un maximum local, que l'on appelle $I_{\max}$. De la même façon, on obtient le minimum local à proximité de P, que l'on appelle $I_{\min}$.

L'estimation de ce paramètre n'est possible que si les valeurs $\tau_{\max}$ et $\tau_{\min}$ correspondant aux intensités maximale et minimale près d'un point donné, sont telles que la différence $\tau_{\max} - \tau_{\min}$ est très petite devant la durée d'un train d'ondes. Si c'est le cas, alors la fonction d'autocorrélation aura l'allure de la figure 13.2, c'est-à-dire que sa phase variera très vite par rapport à son module ; notamment, le module de Γ sera presque constant entre $\tau_{\max}$ et $\tau_{\min}$, tandis que sa phase aura varié de π^7 . Pour $\tau = 0$, on aura bien sûr $\Gamma = I$, puis $|\Gamma(\tau)|$ décroîtra avec le temps.

⁷ C'est la physique qui le dit, non les mathématiques ! On peut comprendre facilement ce phénomène. Supposons que l'on fasse varier τ de manière à ce qu'il reste *petit* devant la durée d'un train d'ondes. Alors, en prenant une valeur de τ égale à une demi-période du signal (qui est quasi-monochromatique), les signaux S_1 et S_2 sont simplement décalés de π : ils sont en opposition de phase et $\Gamma(\tau)$ est réelle, négative et de module quasiment égal à $\Gamma(0)$. Si l'on prend des valeurs de τ nettement plus grandes, il y a décorrélation de plus en plus importante entre les signaux, car il se peut que S_1 vienne d'un train d'ondes et S_2 d'un autre. Un modèle statistique simple de trains d'ondes donne une décroissance exponentielle de $|\Gamma(\tau)|$.

Ainsi, en déplaçant doucement P, τ varie assez peu et donc $|\Gamma|$ reste à peu près constante. Alors $\Re(\Gamma)$ varie entre $-|\Gamma|$ et $+|\Gamma|$, le facteur de visibilité des franges est donc simplement

$$\mathcal{V}(\tau) = |\gamma(\tau)| = \frac{|\Gamma(\tau)|}{I}.$$

Or, d'après le théorème 13.36, la fonction d'autocorrélation est donnée par la transformée de Fourier inverse du spectre de puissance :

$$\Gamma(\tau) = \int_0^{+\infty} W(\nu) e^{2i\pi\nu\tau} d\nu.$$

On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME 13.38 (Wiener-Khintchine) *Le facteur de visibilité des franges dans l'expérience d'interférences d'Young est égal au module de la transformée de Fourier normalisée de la densité spectrale de la source pour la valeur τ correspondant à la différence de temps de vol entre les deux faisceaux :*

$$\mathcal{V} = \left| \frac{\int_0^{+\infty} W(\nu) e^{2i\pi\nu\tau} d\nu}{\int_0^{+\infty} W(\nu) d\nu} \right|.$$

Ainsi, dans le cas d'une source quasi-monochromatique — par exemple une lampe spectrale, qui *devrait* donner une lumière monochromatique, mais qui, par suite des phénomènes d'émission de la lumière par trains d'ondes, est caractérisée par une largeur de raie non nulle — si l'on note $\Delta\nu$ la largeur du spectre, on sait que la transformée de Fourier de la densité spectrale d'énergie a une largeur typique $\Delta t = 1/\Delta\nu$; pour une différence de temps $\tau \gg 1/\Delta\nu$, c'est-à-dire pour une différence de chemin $\gg c/\Delta\nu$, les franges vont donc *se brouiller*. La quantité $\Delta t = 1/\Delta\nu$ est appelée **temps de cohérence** et la longueur $\ell = c/\Delta\nu$ est appelée **longueur de cohérence**.

Remarque 13.39 Il existe un théorème analogue, dû à P. K. VAN CITTERT et F. ZERNIKE, reliant le facteur de visibilité d'une figure de diffraction à la transformée de Fourier de la distribution spatiale d'une source étendue et monochromatique. Le lecteur intéressé peut consulter [14] ou chercher l'exercice 13.2 page suivante.

EXERCICES

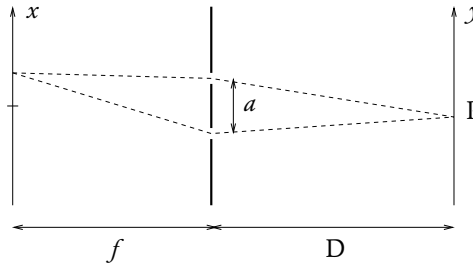
◆ Exercice 13.1 (Champ électromagnétique en jauge de Coulomb)

On considère un champ électromagnétique $[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]$ compatible avec une distribution de charge et de courant $[\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)]$, c'est-à-dire que les champs vérifient les équations différentielles suivantes (équations de Maxwell) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= -\rho/\varepsilon_0 & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned}$$

- i) Montrer que le champ $\mathbf{B}$ est transverse.
- ii) Montrer que la partie longitudinale du champ électrique est donnée par le potentiel de Coulomb instantané associé à la distribution de charge. Que peut-on dire du point de vue de la relativité ?
- iii) La séparation transverse-longitudinale est-elle préservée lors d'une transformation de Lorentz ?

◆ Exercice 13.2 (Théorème de van Cittert-Zernike) Considérons une source lumineuse, invariante par translation selon l'axe $\mathcal{O}y$, caractérisé par une luminosité $I(x)$ sur l'axe $\mathcal{O}x$ et passant au travers d'un système interférentiel comme ci-dessous. La distance entre la source et les fentes est f et la distance à l'écran est D .



On supposera que cette source peut être modélisée comme un ensemble de sources ponctuelles, émettant des trains d'ondes indépendamment les uns des autres, à la même fréquence ν . Les sources étant incohérentes entre elles, on admet que l'intensité observée en un point de la figure d'interférences est la somme des intensités provenant de chaque source⁸. Montrer :

THÉORÈME 13.40 (van Cittert-Zernike) *Le facteur de visibilité de la source $I(x)$ est égal au module de la transformée de Fourier de l'intensité spatiale normalisée de la source, à la fréquence spatiale $k = a/\lambda f$, où a est la distance entre les fentes d'interférences et f la distance de la source au système :*

$$|\gamma| = \left| \mathcal{F}\left(\frac{a}{\lambda f}\right) \right|, \quad \text{avec } \mathcal{F}(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{I(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} I(s) ds}.$$

Le lecteur trouvera dans [14] une généralisation de ce résultat, due à P. H. VAN CITTERT (1934) et à Frederik ZERNIKE (1938), physicien hollandais, prix Nobel 1953.

⁸ On a vu à l'exercice 1.3 page 32 la nécessité qu'il y ait en réalité une largeur spectrale non nulle pour considérer les sources comme incohérentes.

SOLUTIONS

♦ **Solution de l'exercice 13.1.** En passant en transformée de Fourier, les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathcal{E} &= i\tilde{\rho}/\varepsilon_0 & i\mathbf{k} \wedge \mathcal{E} &= \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \\ \mathbf{k} \cdot \mathcal{B} &= 0 & i\mathbf{k} \wedge \mathcal{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mu_0 \tilde{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

La troisième de ces équations montre que $\mathbf{B}$ est transverse.

De plus, puisque $\mathbf{k} \cdot \mathcal{E} = \mathbf{k} \cdot \mathcal{E}_{//}(\mathbf{k}) = -i\tilde{\rho}(\mathbf{k})/\varepsilon_0$, on trouve que

$$\mathcal{E}_{//}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathcal{E}(\mathbf{k})}{k^2} = i \frac{\mathbf{k}}{k^2} \tilde{\rho}(\mathbf{k})/\varepsilon_0$$

et donc, en revenant en transformée de Fourier inverse,

$$\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') [\mathbf{r} - \mathbf{r}']}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}' = \mathbf{E}_{\text{Coulomb}}(\mathbf{r}, t).$$

Ainsi, le champ longitudinal se propage instantanément à travers l'espace, ce qui n'est pas conforme à la relativité restreinte. En conséquence de quoi la séparation champ transverse-longitudinal *n'est pas physique*.

Elle n'est d'ailleurs pas préservée lors d'une transformation de Lorentz, puisque le champ coulombien ne l'est pas.

♦ **Solution de l'exercice 13.2.** L'intensité en un point P d'abscisse y sur l'écran est donnée par l'intégrale des intensités produites par $I(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$. Un calcul élémentaire d'interférences montre que, pour les petits angles, on a

$$\begin{aligned} J(x) &= K \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} I(x) \left[1 + \cos \frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{f} + \frac{y}{D} \right) \right] dx \\ &= KI_0 \left\{ 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(x) \cos \frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{f} + \frac{y}{D} \right) dx \right\}, \end{aligned}$$

avec $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} I(s) ds$ et où $\mathcal{I}(x) = I(x)/I_0$ est l'intensité normalisée. Puisque I et $\mathcal{I}$ sont des fonctions réelles, on peut écrire

$$\begin{aligned} J(y) &= KI_0 \left\{ 1 + \Re \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(x) \exp \left[-\frac{2i\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{f} + \frac{y}{D} \right) \right] dx \right\} \\ &= KI_0 \left\{ 1 + \Re \left[\widetilde{\mathcal{I}} \left(\frac{a}{\lambda f} \right) e^{-2i\pi a y / \lambda D} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Décomposons en module et phase $\widetilde{\mathcal{I}}(a/\lambda f) = |\gamma| e^{i\alpha}$. Alors

$$J(y) = KI_0 \left\{ 1 + |\gamma| \cos \left(\frac{2\pi a y}{\lambda D} - \alpha \right) \right\}.$$

Or, si l'on observe la figure d'interférences près du centre et si l'on fait varier doucement y , l'intensité J sur l'écran varie entre $KI_0(1 - |\gamma|)$ et $KI_0(1 + |\gamma|)$, ce qui montre que $|\gamma|$ est le facteur de visibilité de la figure d'interférences; ce que l'on voulait démontrer.

Ce résultat est utile notamment pour mesurer la distance angulaire entre deux étoiles, ou bien le diamètre apparent d'une étoile, en utilisant deux télescopes montés en interféromètres.